

Théorème 4. Soient A une matrice $m \times n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Soient $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ les colonnes de A . Alors l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ est égal à l'ensemble des solutions de

1. $x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$ (forme vectorielle)
2. $(\underbrace{\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n}_A \mid \vec{b})$ (forme matricielle)

Existence des solutions d'une équation matricielle

Considérons une matrice A de taille $m \times n$. Alors $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une solution $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\vec{s} = \vec{b} \text{ est vrai}$$

th.3

$$\Leftrightarrow s_1 \vec{a}_1 + \dots + s_n \vec{a}_n = \vec{b} \quad (\vec{a}_i \text{ et } \vec{b} \in \mathbb{R}^m)$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \text{ est une comb. lin. des colonnes de } A \text{ avec les } s_i \text{ comme coefficients.}$$

$$\text{Donc : } \quad \parallel \quad A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{b} \text{ est comb. lin. des colonnes de } A$$

Le théorème suivant précise dans quelles conditions la matrice A correspond à un système compatible :

Théorème 5. Soit A une matrice $m \times n$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution ;
2. Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $\vec{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice des coefficients A ;
3. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$; (*)
4. Chaque ligne de A possède un pivot.

(*) Si on a $V = \text{span} \{ \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \} \subseteq \mathbb{R}^m$, on dit que les $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ engendrent V .

Exemple Soit S le système

$$S = \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = b_1 \\ x_2 - 4x_3 = b_2 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = b_3 \end{cases}$$

avec

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

term constant
quelconque

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & -4 & b_2 \\ -4 & -4 & 9 & b_3 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29b_1 + 23b_2 + 7b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 16b_1 + 13b_2 + 4b_3 \\ 0 & 0 & 1 & 4b_1 + 3b_2 + b_3 \end{array} \right)$$

ER

on a 3 pivots et 3 variables de base x_1, x_2, x_3

$\Rightarrow$ il y a une sol. unique

$$\vec{0} = \left(\begin{array}{c} \dots \end{array} \right) \quad (*)$$

Donc: $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible.

"pour tout"

$\Leftrightarrow \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b}$ est une comb. lin. des colonnes de A .

$\Leftrightarrow \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ avec

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{b}$$

les λ_i sont donnés par (*)

$\Leftrightarrow \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ $\vec{b} \in \text{Span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \}$

$\Leftrightarrow \text{Span} \{ \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \} \neq \mathbb{R}^3$

(les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^3$)

Suite de l'exemple

De plus,

$\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $A\vec{x} = \vec{b}$ est compatible

$\Leftrightarrow$ Il n'y a pas de ligne du type

$$(0 \dots 0 \mid *) \text{ avec } * \neq 0$$

dans la forme ER de la matrice augmentée.

$\Leftrightarrow$ Il y a un pivot dans chaque ligne de A .

Remarques

- 1) Si A possède une ligne sans pivot, alors on peut trouver $\vec{b}$ pour laquelle $A\vec{x} = \vec{b}$ est incompatible.

En effet: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ ligne sans pivot

Alors pour $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, le système est incompatible.

- 2) Si l'une des conditions du th.5 est satisfaite, A ne possède pas forcément un pivot par colonne.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
pas une
colonne pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b_1$$

$$\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = b_1$$

x_2 est une variable libre et le système est compatible $\forall b_1$.

Preuve du théorème 5

Notons $\vec{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Dire qu'il y a au moins un $\vec{s}$ existe (avec $A\vec{s} = \vec{b}$) correspond au fait que $\vec{b}$ est comb. lin. des colonnes de A avec les s_i comme coefficients.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) découle de la déf. de la notion de span : $\text{span}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$ $\vec{a}_i \in \mathbb{R}^m$

(1) $\Leftrightarrow$ (4)
 • Si A a des pivots dans toutes les lignes, alors il existe une solution
 • Si on a une ligne sans pivot, alors on peut choisir un $\vec{b}$ pour lequel il n'existe pas de solution.

Exemple 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

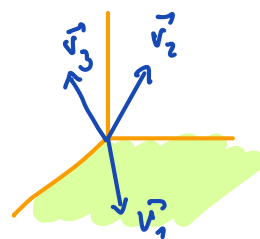
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \end{array} \right) \quad (4) \text{ est vrai}$$

↑ colonne sans pivot

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = b_1 \\ x_2 + x_3 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = b_1 - x_3 \\ x_2 = b_2 - x_3 \end{cases}$$

(1) Ok car : $t \in \mathbb{R}$ un paramètre. Alors pour tout $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ une solution est donnée par

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} b_1 - t \\ b_2 - t \\ t \end{pmatrix}$$



Suite de l'exemple 1

(2) ou car $\forall \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, on a

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \underbrace{(b_1 - t)}_{\text{pink}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{pink}} + \underbrace{(b_2 - t)}_{\text{pink}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{pink}} + \underbrace{t}_{\text{pink}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{pink}}$$

on a aussi: $\vec{b} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en fait $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est inutile.

(3) $\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$ vrai à cause de (2)

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne non pivot}$$

(4) est faux

(1) est faux car $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ incompatible

(2) est faux car $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $\text{span} \neq \mathbb{R}^3$ car $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{span}$

1.6 Forme de l'ensemble des solutions d'une équation matricielle

A) Étude des solutions d'un système homogène

Soit A une matrice $m \times n$ et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. On considère le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$, où $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$. On a vu que le système est toujours consistant. Plus précisément, on a soit

- 1) une unique solution ($\vec{x} = \vec{0}$, solution triviale)
- 2) une infinité de solutions, comprenant la solution triviale.

Résultat

Un système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution non-triviale si et seulement si on a au moins une variable libre.

Exemple 1

Soit le système homogène

$$S = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}$$

2 pivots
 x_1, x_2 de base
 x_3 libre

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$$

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \text{ pour } t \in \mathbb{R}$$

$$= t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{on dira que } \vec{0} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est la solution générale
 de $A\vec{x} = \vec{0}$.

$$S = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

on a choisi $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ correspondant à $t=1$

comme représentant.

Exemple 2

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 0 \end{cases}$$

exercice: écrire la solution générale sous deux formes différentes (choisir des représentants différents)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 8 & -10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \end{array} \right)$$

$\uparrow$
 x_2 libre

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

choix 1 : paramétriser t par x_2 ,
 $t \in \mathbb{R}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\tilde{v}}$$

choix 2 : paramétriser u par x_1 ,
 $u \in \mathbb{R}$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} u \\ -1/2 u \\ 0 \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{\tilde{w}}$$

$$\text{On a } S = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

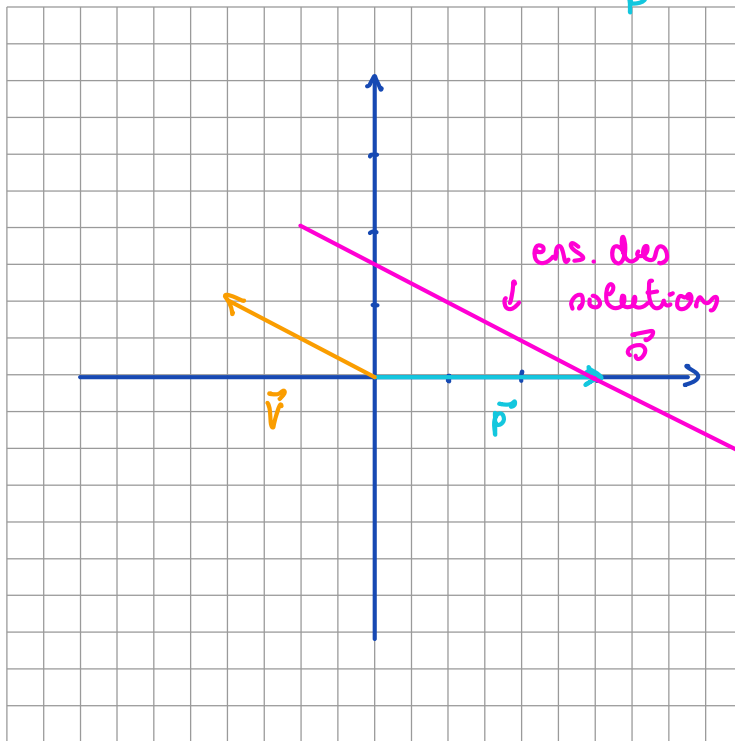
Remarque: $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ont des coefficients proportionnels.

B) Étude des solutions d'un système non-homogène

On va s'intéresser à des systèmes non-homogènes $A\vec{x} = \vec{b}$ (où $\vec{b} \neq \vec{0}$) compatibles admettant une infinité de solutions et décrire la forme de celles-ci.

Exemple dans $\mathbb{R}^2$: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 3 \end{pmatrix}$
 $\uparrow$
 x_2 libre

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3-2t \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}} \quad \vec{a} = \vec{p} + t\vec{v}$$



où
 $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une solution du syst. homogène

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

car $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Théorème 6. Soient A une matrice $m \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ tels que $A\vec{x} = \vec{b}$ // admette une solution $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$. Alors l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ est l'ensemble des vecteurs de la forme

$$\vec{w} = \vec{p} + \vec{v}$$

où $\vec{v}$ est une solution du système homogène
 $A\vec{x} = \vec{0}$.

Preuve:

- $A\vec{w} = A(\vec{p} + \vec{v}) = A\vec{p} + A\vec{v} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$
 $\Rightarrow \vec{w}$ est bien une solution.
- N'importe quelle solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ s'écrit

$\vec{\omega} = \vec{p} + (\vec{\omega} - \vec{p})$. On vérifie que $A\vec{v} = \vec{0}$:

$$A(\vec{\omega} - \vec{p}) = A\vec{\omega} - A\vec{p} = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}. \text{ Donc } \vec{v} \text{ est bien une sol. du système homogène.}$$

Exemple dans $\mathbb{R}^3$:

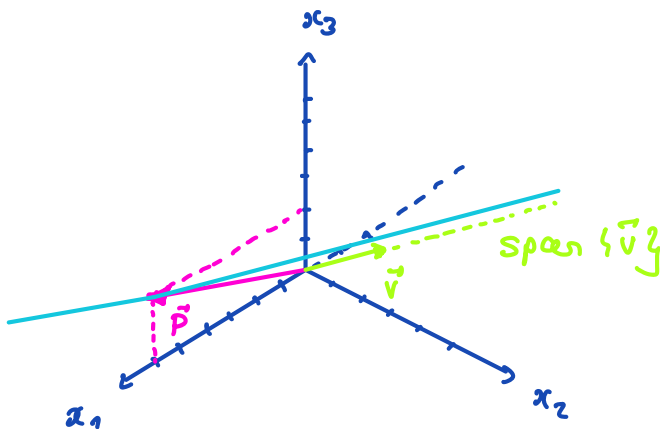
$$S = \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 4 \end{cases} \quad (\text{voir p. 44})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 0 \\ 4 & 8 & -10 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \\ x_3 = 2 \end{cases} \quad x_2 \text{ libre}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 6 - 2t \\ t \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où $\vec{v}$ est une sol. du système $A\vec{x} = \vec{0}$, et $t\vec{v}$ est la sol. générale de $A\vec{x} = \vec{0}$.



géométriquement, on fait une translation de $\vec{p}$ du span $\{\vec{v}\}$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$